



Simulação Numérica de Sistemas de N -Corpos com Atracção Gravítica

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade
de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Física

Nuno Sidónio Andrade Pereira

2000

Em memória de *Isaac Newton*.

Introdução¹

A motivação inicial deste trabalho foi desenvolver ferramentas computacionais que permitissem estudar o célebre problema dos N -corpos com atracção gravítica: *dado um conjunto de massas pontuais que interagem de acordo com a Lei de Newton da Gravitação, a partir das condições iniciais do sistema, prever a sua evolução*. Enunciado assim de forma tão sucinta parece, à primeira vista, um problema simples. Na pior das situações, deve ser trabalhoso do ponto de vista técnico, se N for muito “grande”. De facto, a sua simplicidade esconde uma riqueza matemática que, há mais de um século, tem vindo a desafiar o conhecimento.

Em 1894, Poincaré demonstrou teoricamente a impossibilidade de calcular soluções gerais quando $N \geq 3$. A abordagem numérica, com todos os seus defeitos e virtudes, surge assim como uma alternativa, e ao mesmo tempo um complemento, aos estudos teóricos.

A integração numérica mostrou-se no início incapaz de simular sistemas com um número de partículas próximo do de sistemas reais com, por exemplo, enxames abertos ($N \approx 10^2$ - 10^3) e enxames globulares ($N \approx 10^4$ - 10^6). A necessidade de estudar a dinâmica de tais sistemas exigiu o desenvolvimento de técnicas numéricas específicas e motivou grandes avanços nos computadores digitais. Actualmente, este problema ainda representa um grande desafio.

Embora exista uma grande variedade de pacotes de aplicações computacionais para o efeito, onde estão implementados os algoritmos convencionais e suas variantes mais sofisticadas, resolvemos iniciar o processo a partir do zero, isto é, tendo apenas como base um integrador de sistemas de equações diferenciais de passo variável, gentilmente cedido por Carles Simó. Deste modo, saberíamos exactamente o que estava dentro da “caixa negra” computacional e, acima de tudo, seria muito mais fácil incorporar no algoritmo do integrador numérico técnicas analíticas específicas, nomeadamente a regularização de encontros binários. O processo esteve longe de ser linear e desenvolveu-se em duas linhas de trabalho: enquanto que, por um lado, estudávamos as técnicas matemáticas relacionadas com o problema dos N -corpos de modo a ter uma visão geral do enquadramento teórico, por outro, desenvolvíamos algoritmos numéricos onde implementávamos as técnicas analíticas. Um processo deste tipo tem sempre uma certa dose de recursividade mas, no entanto, esperamos sempre atingir uma configuração estável ao fim de um número finito de iterações.

As três primeiras partes do trabalho desenvolvem-se ao longo de 11 capítulos e constituem o corpo principal. Aí desenvolvemos a exposição teórica necessária à compreensão do problema, definimos os algoritmos e apresentamos os resultados numéricos. Na quarta e última parte, agrupámos 8 apêndices onde apresentamos algumas discussões que, embora importantes, podem ser feitas fora da sequência principal do texto, evitando assim a quebra de ritmo na apresentação do trabalho. Passemos agora à descrição mais detalhada do conteúdo.

¹ O resumo que aqui apresentamos aparece no prefácio do autor, incluído na versão final da dissertação.

Parte I - Regularização no Problema dos 2-Corpos

Aqui abordamos o problema dos encontro binários, discutimos as técnicas clássicas de regularização (Levi-Civita e Kustaanheimo-Stiefel) e introduzimos uma técnica muito simples e eficaz, a regularização “*InOut*” (capítulo 1). A exposição é acompanhada de vários exemplos numéricos.

No capítulo 2 estudamos o efeito dos encontro binários na precisão das soluções numéricas e o papel da regularização no controlo dos erros.

Parte II - O Problema dos N -Corpos

No capítulo 3 começamos pela formulação matemática do problema dos N -corpos. De seguida discutimos o problema das singularidades colisionais e da existência de singularidades não colisionais. Apresentamos ainda alguns teoremas fundamentais e terminamos com uma breve discussão sobre as soluções particulares para o caso $N > 2$, as soluções homógrafas, e as configurações centrais.

No capítulo 4 discutimos os problemas associados à resolução numérica dos sistemas de N -corpos, em particular, a ocorrência de encontros binários. Apresentamos um critério para a definição de pares de partículas candidatas a regularização. Para o caso de encontros múltiplos, apresentamos uma heurística que permite contornar os problemas numéricos que surgem nas situações em que a regularização binária simples não é suficiente. Ao longo do capítulo fazemos ainda a descrição formal dos algoritmos *NNEWTON1/3/5* em termos da definição das estruturas de dados e operações.

No capítulo 5, apresentamos três estudos numéricos onde ocorrem encontros: a integração de um sistema triplo, de um sistema com binários simultâneos ($N=18$) e de um sistema com dois binários e um sistema triplo, num envelope de partículas inicialmente virializado ($N=20$). Estudamos ainda os erros numéricos e a sua relação com diversos parâmetros envolvidos na integração numérica e na regularização, no caso do sistema de binários simultâneos.

Parte III - As Equações Variacionais do Movimento

Começamos por dar uma introdução ao problema da instabilidade exponencial em sistemas de N -corpos com atracção gravítica (capítulo 6) e abordamos o problema da validade das simulações numéricas destes sistemas. De seguida, no capítulo 7 estabelecemos as equações variacionais associadas às equações do movimento do problema de N -corpos e definimos métricas para, a partir das equações variacionais, avaliar o crescimento de perturbações no sistema e relacioná-lo com a instabilidade exponencial através dos expoentes de Lyapunov. No capítulo 8 apresentamos o primeiro algoritmo que integra as equações do movimento e as variacionais em simultâneo com alguns exemplos numéricos.

O passo seguinte consiste em introduzir a regularização nas equações variacionais. No capítulo 9 apresentamos dois métodos de regularização, um deles com perturbação externa.

No capítulo 11, o último deste trabalho, apresentamos o balanço final e apontamos direcções para trabalho futuro.

Apêndices

Como mencionámos no início, resolvemos incluir como apêndices alguns textos que servem de apoio e complemento ao corpo principal do trabalho. Nos primeiros seis apêndices apresentamos cálculos que justificam algumas afirmações feitas ao longo do trabalho. No apêndice G apresentamos um resumo dos métodos numéricos actualmente mais usados para integrar sistemas de N -corpos e, em particular, discutimos as aproximações que são consideradas na sua construção e o âmbito da sua utilização. Por ser um tema cada vez mais importante para quem faz simulações numéricas com muitas partículas, mencionamos a utilização da computação distribuída e de computadores dedicados, nomeadamente os da família GRAPE, em diversos estudos de sistemas de N -corpos. Finalmente, no apêndice H descrevemos todos os programas escritos neste trabalho, em particular, o formato dos ficheiros de entrada e de saída.

A realização deste trabalho foi suportada parcialmente pelo programa *PRAXIS XXI* (Bolsa BM/594/94) e pelo projecto *Fenómenos não lineares em Mecânica Celeste, Astrofísica e Cosmologia* (PIBCT/FIS/2215/95).